

۱- وضعیت هر صفت از خطوط زیر را نسبت بهم مشخص کنید.

$$L: 3x + y = 2$$

$$T: 3y - x = 0$$

$$\Delta: 3y = x + 2$$

۲- اگر $A(2, -7)$ ، $B(8, -3)$ فاصله مبدأ مختصات از نقطه وسط پاره خط AB را بدست آورید.

۳- نشان دهید مثلث بارئوس $A(1, 2)$ ، $B(-3, 4)$ ، $C(-1, 0)$ یک مثلث متساوی الساقین است.

۴- دو مرکز از قطرهای دایره ای نقاط $A(-2, -1)$ و $B(3, 2)$ هستند. مختصات مرکز دایره شعاع دایره را بیابید.

آیا نقطه $(9, 3)$ روی این دایره قرار دارد؟

۵- نقاط $A(-1, 2)$ ، $B(5, 1)$ ، $C(2, 1)$ سه رأس از متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند.

(الف) مختصات رأس D را بدست آورید.

(ب) مساحت متوازی الاضلاع را بیابید.

۶- مساحت مربعی را حساب کنید که یک ضلع آن روی خط $x + 2y = 5$ باشد و یک رأس آن

نقطه $(3, 4)$ باشد.

۷- دو ضلع مربعی بر روی خطوط $y - 3x + 2 = 0$ و $y = 3x + 2$ قرار دارند. مساحت این مربع را حساب کنید.

۱- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 14x^2 + 49 = 0$

ب) $x^3 - 9x^2 + 18x - 8 = 0$

۲- معادله درجه دوی بنویسید که ریشه های آن $2 + \sqrt{5}$ و $2 - \sqrt{5}$ باشند.

۳- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$

ب) $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

۴- توبی را از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین به بالا پرتاب می کنیم. t ثانیه بعد از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله آن به صورت زیر است:

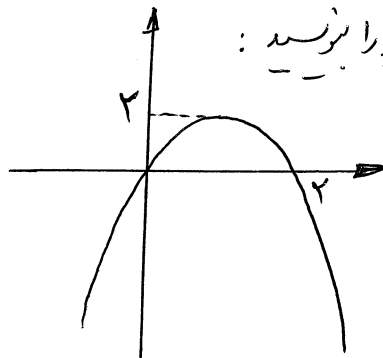
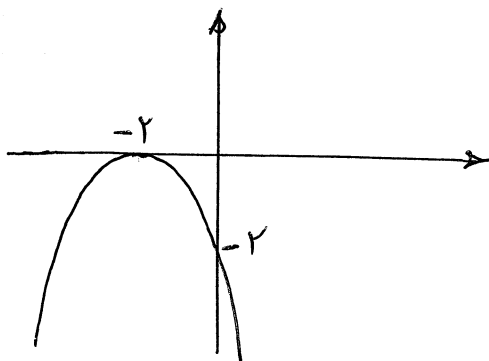
$$h(t) = -5t^2 + 10t + 20$$

الف) چه قدر طول می کشد تا توب به اوج برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

ج) چند ثانیه پس از پرتاب، توب به زمین برخورد می کند؟

د- معادله همی های زیر را بنویسید:



۱- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 3$

ب) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+3}$

ج) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x-1}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$

د) $k = \sqrt{1k-15}$

ه) $x + \sqrt{x} = 20$

و) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$

ز) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{5}{2}$

۲- اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۲۰ متر سقوط آزاد کند، سرعت آن در ارتفاع h متری از سطح زمین

از رابطه $v = \sqrt{400 - 20h}$ به دست می آید. این شیء در چه ارتفاعی به سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می رسد؟

۳- عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذر دو برابرش، مساوی نصف آن عدد باشد.

۴- معادله‌ای شامل تفاضل دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۲ یکی از ریشه‌های آن باشد.

درس اول - فصل اول - هندسه تحلیلی

1) باید نسبت معادله‌ها درست کنیم

$$L: y = -3x + 2 \rightarrow m_L = -3$$

$$T: y = \frac{1}{4}x \rightarrow m_T = \frac{1}{4}$$

$$\Delta: y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{4} \rightarrow m_\Delta = \frac{1}{4}$$

Δ و T موازی اند و بر L عمود هستند.

2) AB وسط $(\frac{1+2}{2}, \frac{-3+(-7)}{2}) = (5, -5)$

فاصله تا مبدأ $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

3) $AB = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{20}$

$AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ دایره برابر دارد.

4) $AB =$ قطر دایره $= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

\Rightarrow شعاع دایره $= 2\sqrt{2}$

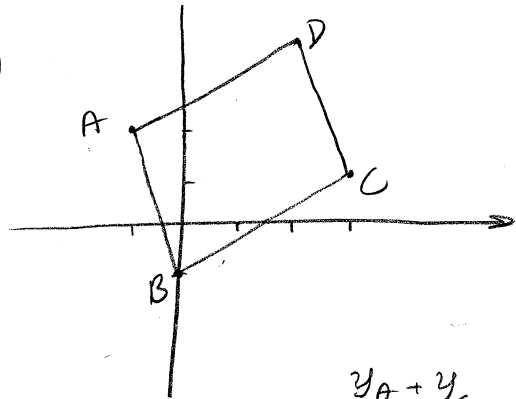
مرکز دایره: AB وسط $= (\frac{3-1}{2}, \frac{2-2}{2}) = (1, 0)$

اگر فاصله مرکز تا $(4, 3)$ برابر شعاع باشد، این نقطه روی دایره قرار دارد.

فاصله $(1, 0)$ تا $(4, 3)$ $= \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{20+9} = \sqrt{29}$

پس $(4, 3)$ روی دایره قرار ندارد.

۵)



مرکز متوازی الاضلاع، م وسط AC است م وسط BD

$$\frac{x_D + x_B}{2} = \frac{x_A + x_C}{2}$$

$$\Rightarrow x_D + 0 = -1 + 2 \Rightarrow x_D = 2$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 2 + 1 = -1 + y_D \Rightarrow y_D = 4$$

$$\Rightarrow D = (2, 4)$$

فاصله A تا BC، طول BC، اتصاف و نظر هم داریم

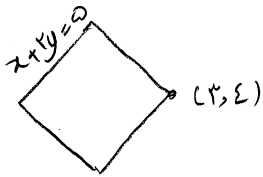
$$BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

BC خط : $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow 3y - 2x + 1 = 0$

فاصله A تا خط BC = $\frac{|3 \times 2 - 2(-1) + 1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$

$S_{\square} = \text{طول} \times \text{عرض}$
 $= \frac{11}{\sqrt{13}} \times \sqrt{13} = 11$

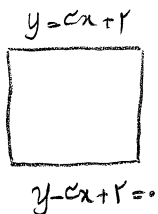
۶) فاصله از خط = ضلع بیخ



$$d = \frac{|2 + 2 \times 4 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

۷) فاصله در ضلع = طول ضلع



$$y - 2x - 2 = 0, \quad y - 2x + 2 = 0$$

$$d = \frac{|-2 - 2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$S = \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{16}{10} = 1,6$$

سؤال اول:

$$\text{الف) } x^4 - 14x^2 = 14 \xrightarrow{y=x^2} y^2 - 14y - 14 = 0$$

$$\rightarrow (y-14)(y+2) = 0 \rightarrow y_1 = 14, y_2 = -2$$

$$\rightarrow x^2 = 14 \rightarrow \underline{x_1 = \pm 2} \quad y_2 = x_2^2 = -2 \text{ امکان ندارد}$$

$$\text{ب) } x^4 - 9x^2 + 8 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - 9y + 8 = 0 \rightarrow (y-8)(y-1) = 0$$

$$\rightarrow y_1 = x^2 = 1 \rightarrow \underline{x_1 = 1} \quad y_2 = x^2 = 8 \rightarrow \underline{x_2 = 2}$$

سؤال دوم:

$$(x - (2 + \sqrt{5})) (x - (2 - \sqrt{5})) = x^2 - (2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5})x + (4 - 5)$$

$$\rightarrow \underline{x^2 - 4x - 1 = 0}$$

سؤال سوم:

$$\text{الف) } f(x) = -x^2 + 2x + 5 \rightarrow \begin{array}{l} \text{چون علامت } x^2 \text{ منفی} \\ \text{هست پس بیشترین دارد.} \end{array} \rightarrow x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 5 = \frac{-1 + 2 + 20}{4} = \frac{21}{4}$$

$$\text{ب) } f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \rightarrow \begin{array}{l} \text{چون علامت } x^2 \text{ مثبت} \\ \text{هست پس کمترین دارد} \end{array} \rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = 1$$

$$f_{\max} = f(1) = 2 - 2 - 1 = -1$$

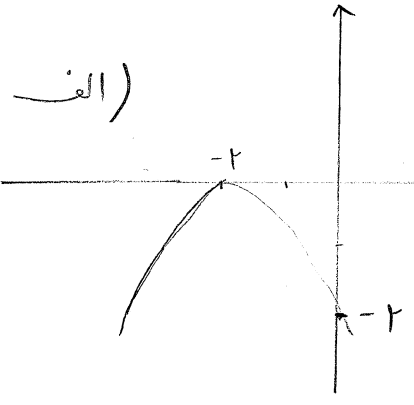
سؤال چهارم:
 ω، ارتفاع طول می‌تشد
 توپ به ارتفاع اوج برسد.

الف) $h(t) = -\omega t^2 + 1\omega t + 10 \rightarrow t_{\text{اوج}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1\omega}{-2\omega} = \frac{1}{2} \text{ s}$

ب) $h_{\text{اوج}} = -\omega \times \frac{1}{4} + 1\omega \times \frac{1}{2} + 10 = \frac{-\omega + 2\omega + 40}{2} = \frac{\omega + 40}{2} \text{ m}$

ج) $h(t) = -\omega t^2 + 1\omega t + 10 = 0 \rightarrow h(t) = -\omega(t^2 - t - 10) = 0$
 $\rightarrow -\omega(t-10)(t+1) = 0 \rightarrow t = 10 \text{ s} \quad t = -1$

سؤال پنجم:



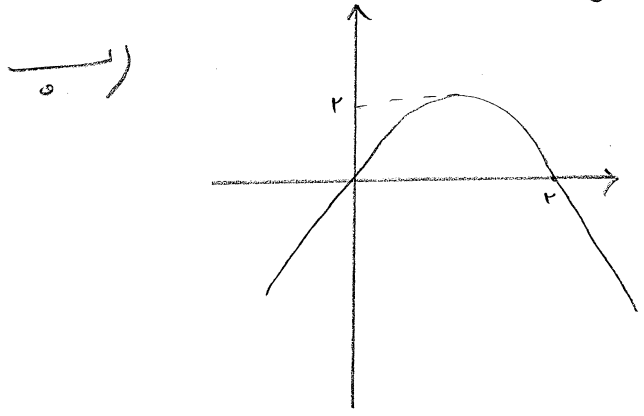
$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} f(0) = -2 \rightarrow c = -2$

$y_{\text{max}} = 0, x_{\text{max}} = -1$
 $\rightarrow \frac{-b}{2a} = -1 \rightarrow b = 2a$

$\rightarrow f(-1) = a - 1a - 2 = 0 \rightarrow -2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

$b = -2$



$f(x) = m(x-r)(x-r) = mx^2 - 2rx + r^2$

$\rightarrow x_{\text{max}} = \frac{-b}{2a} = \frac{2r}{2m} = 1$

$y_{\text{max}} = f(1) = m - 2rm + r^2 = 2 \rightarrow -m = 2$
 $\rightarrow m = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 4x$

نصل اول درس سوم - معادله درجه دوم

سؤال اول:

$$\text{الف) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 3 \rightarrow x(x-1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) = 3(x)(x-1)$$

$$\rightarrow (x-1) + x = 3x^2 - 3x \rightarrow 2x-1 = 3x^2 - 3x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow \alpha, \beta = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, \beta = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+3} \rightarrow (x+1)(x+2)(x+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) = (x+1)(x+2)(x+3) \left(\frac{4}{x+3} \right)$$

$$\rightarrow (x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) = 4(x+1)(x+2)$$

$$\rightarrow x^2 + 5x + 6 + 2x^2 + 8x + 6 = 4x^2 + 12x + 8$$

$$\rightarrow 3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x + \frac{5}{3}) = 0 \rightarrow x = 0, -\frac{5}{3}$$

$$\text{ج) } \frac{x}{x-2} + \frac{2x-1}{x+2} = \frac{20}{x^2-4} \rightarrow (x+2)(x-2) \left(\frac{x}{x-2} + \frac{2x-1}{x+2} \right) = (x+2)(x-2) \left(\frac{20}{x^2-4} \right)$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 2x^2 - \omega x + 2 = 20 \rightarrow 3x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\rightarrow 3(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow 3(x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3, -2$$

$$\text{د) } k = \sqrt{14k-14} \rightarrow k^2 = 14k-14 \rightarrow k^2 - 14k + 14 = 0 \rightarrow (k-14)(k-1) = 0$$

$$\rightarrow k = 14, 1$$

$$\text{ه) } x + \sqrt{x} = 20 \rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \xrightarrow{\text{بزرگ کردن}} x = (20-x)^2 \rightarrow x = x^2 - 40x + 400$$

$$\rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0 \rightarrow \alpha, \beta = \frac{41 \pm \sqrt{1681-1600}}{2} = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{41 \pm 9}{2}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{50}{2} = 25, \beta = \frac{32}{2} = 16$$

9) $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ ^{تبدیل} $\rightarrow 2x+1 = 2 + 2\sqrt{x-3} + x-3$

$\rightarrow x = 2\sqrt{x-3} \rightarrow x^2 = 4(x-3) \rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$\rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

10) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{\omega}{\epsilon}$ ^{تبدیل متغیر} $\rightarrow \sqrt{m} = x \rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{\omega}{\epsilon}$ ^{درجه بندی} $\rightarrow x^2 + 1 = \frac{\omega}{\epsilon} x$

$\rightarrow x - \frac{\omega}{\epsilon} x + 1 = 0 \rightarrow \alpha, \beta = \frac{\frac{\omega}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\epsilon^2} - 4}}{2} = \frac{\frac{\omega}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2}}}{2} = \frac{\frac{\omega}{\epsilon} \pm 1}{\epsilon}$

$\rightarrow \alpha = \frac{\frac{\omega}{\epsilon} + 1}{\epsilon} = \frac{\omega + \epsilon}{\epsilon^2}, \beta = \frac{\frac{\omega}{\epsilon} - 1}{\epsilon} = \frac{\omega - \epsilon}{\epsilon^2} \rightarrow \sqrt{m} = \frac{\omega + \epsilon}{\epsilon^2} \rightarrow m_1 = \frac{(\omega + \epsilon)^2}{\epsilon^4}, \sqrt{m_2} = \frac{\omega - \epsilon}{\epsilon^2} \rightarrow m_2 = \frac{(\omega - \epsilon)^2}{\epsilon^4}$

$V = 10 \rightarrow 10 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \rightarrow 100 = v_0^2 - 2gh \rightarrow 2gh = v_0^2 - 100$

سوال دوم:

$\rightarrow h = \frac{v_0^2 - 100}{2g} = 100 \text{ m}$

$x - \sqrt{2x} = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2x} (\sqrt{2x} - \sqrt{2}) = \sqrt{2x} (\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2}})$

سوال سوم:

$\rightarrow \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2x} = 2\sqrt{2} \rightarrow x = (2\sqrt{2})^2 = 8$

سوال چهارم:

$x = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x^2 + 4x = 2 + 4x \rightarrow x^2 + 4x + 2 = 2 + 4x$

$\rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 2} = \sqrt{2 + 4x} \rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 2} - \sqrt{2 + 4x} = 0$